MATHÉMATIQUES (SPÉCIALITÉ) · PREMIÈRE GÉNÉRALE

La dérivation

7 notions, l'essentiel à retenir et les pièges à éviter.



1 Taux de variation et nombre dérivé

$f'(a) = \text{limite de } [f(a+h) - f(a)] / h \text{ quand } h \to 0$

- Taux de variation entre a et a + h ($h \neq 0$) : pente de la sécante.
- Si ce taux tend vers un réel quand h tend vers 0, f est dérivable en a et ce réel est f'(a).
- On simplifie par h avant de passer à la limite.

2 Tangente

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

- Droite passant par A(a ; f(a)), de coefficient directeur f'(a).
- f'(a) = 0 : tangente horizontale.

3 Dérivées usuelles

- $k \to 0$; $x \to 1$; $x^2 \to 2x$; $x^3 \to 3x^2$; $x^n \to nx^{n-1}$ (n entier, $n \geq 1$).
- $1/x \to -1/x^2$ sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.
- $\sqrt{x} \to 1/(2\sqrt{x})$, sur $]0 ; +\infty[$ seulement : $\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.
- $|x|$ n'est pas dérivable en 0 (angle, pas de tangente).

4 Somme et produit

$(u+v)' = u' + v' \cdot (ku)' = ku' \cdot (uv)' = u'v + uv'$

- Un polynôme se dérive terme à terme ; une constante ajoutée disparaît.
- La dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

5 Quotient et g(ax + b)

$$(1/v)' = -v'/v^2 \cdot (u/v)' = (u'v - uv')/v^2$$

- v ne doit pas s'annuler sur l'intervalle ; garde v^2 sous forme de carré.
- Dérivée de g(ax + b) : a × g'(ax + b). Ne pas oublier le facteur a.

6 Variations

- Sur un intervalle : $f' \geq 0$, f croissante ; $f' \leq 0$, f décroissante ; f' = 0, f constante.
- f' > 0 sauf en des points isolés : f strictement croissante.
- Méthode : calculer f', la factoriser, étudier son signe, dresser le tableau.

7 Extremums et étude de fonction

- f' s'annule en changeant de signe en a : extremum local en a (+ puis − : maximum ; − puis + : minimum).
- Étapes : domaine, f'(x), signe, tableau de variations, conclusion.
- Écarter les solutions de f'(x) = 0 hors du domaine ; comparer avec les bornes.

Pièges à éviter

- Oublier + f(a) dans l'équation de la tangente.
- Dériver un produit ou un quotient facteur par facteur.
- Oublier le facteur a dans la dérivée de g(ax + b).
- Conclure à un extremum dès que f'(a) = 0 : x^3 en 0 en est un contre-exemple.
- Lire les variations sur le signe de f au lieu de celui de f'.