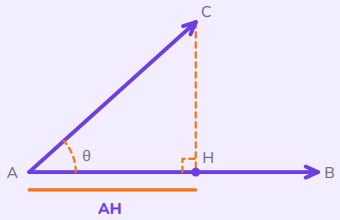
MATHÉMATIQUES (SPÉCIALITÉ) · PREMIÈRE GÉNÉRALE

Produit scalaire

7 notions, l'essentiel à retenir et les pièges à éviter.



1 Définitions

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$$

- Pour u et v non nuls formant un angle θ, le produit scalaire u · v est un nombre réel ; il vaut 0 si un vecteur est nul.
- Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) : produit scalaire des vecteurs AB et AC = AB × AH, ou −AB × AH si les vecteurs AB et AH sont de sens contraires.

2 Normes et coordonnées

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

- Avec les normes : $u \cdot v = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$.
- Dans un repère orthonormé, pour u(x ; y) et v(x' ; y') : $\|u\|^2 = x^2 + y^2$.

3 Propriétés de calcul

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

- Symétrie $u \cdot v = v \cdot u$; bilinéarité $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ et $(ku) \cdot v = k\,(u \cdot v)$.
- Carré scalaire $u \cdot u = \|u\|^2$; $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\,u \cdot v + \|v\|^2$; $(u + v) \cdot (u - v) = \|u\|^2 - \|v\|^2$.

4 Orthogonalité

- u et v orthogonaux ⇔ u · v = 0, soit xx' + yy' = 0 en repère orthonormé.
- ABC est rectangle en A ⇔ le produit scalaire des vecteurs AB et AC est nul.
- Vecteurs non nuls : produit positif si l'angle est aigu, négatif s'il est obtus.

5 Formule d'Al-Kashi

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

- Elle généralise Pythagore : si $\hat{A} = 90°$, $\cos \hat{A} = 0$.
- Trois côtés connus : $\cos \hat{A} = (AB^2 + AC^2 - BC^2) / (2 \times AB \times AC)$.

6 Médiane et cercle de diamètre [AB]

$$MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + AB^2/2$$

- I milieu de [AB] : produit scalaire des vecteurs MA et MB = $MI^2 - AB^2/4$.
- Les points M où ce produit scalaire est nul forment le cercle de diamètre [AB] (centre I, rayon AB/2).

7 Angles et longueurs

- Angle : $\cos \theta = u \cdot v / (\|u\| \times \|v\|)$, puis arccos à la calculatrice.
- Longueur : écrire le vecteur comme une somme, puis développer le carré de sa norme.

Pièges à éviter

- Croire que $u \cdot v$ est un vecteur : c'est un nombre réel.
- Écrire $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$, ou oublier le double produit $2\,u \cdot v$.
- Utiliser xx' + yy' dans un repère qui n'est pas orthonormé.
- Oublier le signe – quand le projeté H est du côté opposé à B.
- Se tromper de côté dans Al-Kashi : le côté isolé est opposé à l'angle utilisé.