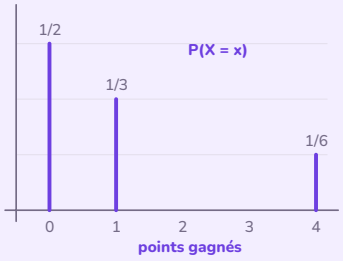
MATHÉMATIQUES (SPÉCIALITÉ) · PREMIÈRE GÉNÉRALE

Variables aléatoires réelles

7 notions, l'essentiel à retenir et les pièges à éviter.



1 Variable aléatoire

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

- X associe un nombre réel à chaque issue d'un univers fini Ω.
- {X = a} est l'ensemble des issues pour lesquelles X vaut a.

2 Loi de probabilité

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = 1$$

- Tableau des valeurs de X et de leurs probabilités P(X = x).
- Chaque p_i est entre 0 et 1, et leur somme vaut 1.

3 Espérance

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \ldots$$

- Moyenne des valeurs pondérées par leurs probabilités.
- Moyenne obtenue sur un très grand nombre de répétitions.

4 Jeu équitable

- Gain algébrique G = gain reçu − mise.
- Équitable si E(G) = 0, favorable si E(G) > 0, défavorable si E(G) < 0.
- Un jeu d'argent a toujours une espérance négative pour le joueur.

5 Variance et écart-type

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- V(X) : moyenne pondérée des carrés des écarts à E(X), toujours positive ou nulle.
- σ(X) = $\sqrt{V(X)}$, dans l'unité de X.

6 Transformation aX + b

- $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- $V(aX + b) = a^2V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

7 Simulation en Python

- randint(1, 6) : entier de 1 à 6 ; random() < p : vrai avec la probabilité p.
- Pour n grand, la moyenne d'un échantillon est proche de E(X).

Pièges à éviter

- Oublier une valeur de X : la somme des probabilités doit valoir 1.
- Calculer la moyenne simple des valeurs au lieu de l'espérance pondérée.
- Oublier de retirer la mise dans le gain algébrique.
- Confondre $E(X^2)$ et $E(X)^2$, ou trouver une variance négative.
- Ajouter b dans la variance, ou oublier d'élever a au carré.