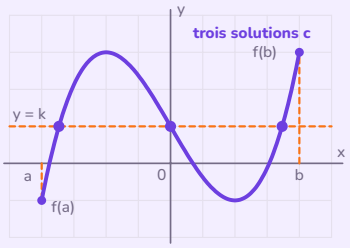
MATHÉMATIQUES · TERMINALE GÉNÉRALE

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

6 notions, l'essentiel à retenir et les pièges à éviter.



1 Fonction continue

f continue en a $\Leftrightarrow$ lim f(x) = f(a) quand x $\to$ a

- f est continue en a si la limite de f en a vaut f(a).
- Les fonctions usuelles sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
- Dérivable implique continue ; la réciproque est fausse (|x| et $\sqrt{x}$ en 0).

2 Continuité et suites

- Fonction par morceaux : limite à gauche = limite à droite = valeur au point.
- Si $u_n \to a$ et f est continue en a, alors $f(u_n) \to f(a)$.

3 Théorème des valeurs intermédiaires

- f continue sur [a ; b], k entre f(a) et f(b) : f(x) = k a au moins une solution dans [a ; b].
- Pour f(x) = 0 : f(a) et f(b) de signes contraires.
- Le théorème ne donne ni le nombre ni la valeur des solutions.

4 Cas strictement monotone

- Continue et strictement monotone : la solution est unique.
- Sur un intervalle ouvert ou infini, on remplace f(a) et f(b) par les limites aux bornes.
- Si f change de sens, on raisonne sur chaque intervalle de monotonie.

5 Dichotomie

- On coupe [a ; b] en deux et on garde la moitié où f change de signe.
- Après n étapes, la longueur vaut $(b - a)/2^n$: 10 étapes pour 10^{-3} sur [0 ; 1].

6 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

- Si $u_n \to \ell$ et f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.
- Démarche : récurrence, convergence monotone, puis résolution de f(x) = x.
- On garde la solution compatible avec l'encadrement des termes.

Pièges à éviter

- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sans justifier la continuité.
- Conclure à l'unicité sans stricte monotonie.
- Croire que f(a) et f(b) de même signe interdisent toute solution.
- Utiliser $f(\ell) = \ell$ avant d'avoir prouvé la convergence.
- Garder une solution parasite de f(x) = x, hors de l'encadrement.