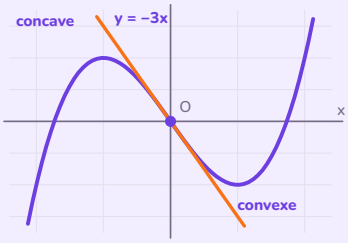
MATHÉMATIQUES · TERMINALE GÉNÉRALE

Dérivation et convexité

7 notions, l'essentiel à retenir et les pièges à éviter.



1 Dérivée d'une composée

$$[g(u(x))]' = u'(x) \times g'(u(x))$$

- g(u(x)) : on calcule u(x), puis on applique g. L'ordre compte.
- Dériver g en gardant u(x) à l'intérieur, puis multiplier par u'(x).
- Cas affine : [g(ax + b)]' = a g'(ax + b).

2 Formules usuelles

- (e^u)' = u' e^u ; $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$ (n entier, $n \geq 1$).
- $(1/u)' = -u'/u^2$, là où u ne s'annule pas.
- $(\sqrt{u})' = u'/(2\sqrt{u})$, là où $u > 0$.

3 Dérivée seconde

- f'' est la dérivée de f'.
- Le signe de f'' donne les variations de f', donc l'évolution des pentes des tangentes.
- Exemple : $f(x) = x^4 - 2x^3$, $f''(x) = 12x(x - 1)$.

4 Convexité

$$f \text{ convexe sur } I \iff f'' \geq 0 \text{ sur } I$$

- Convexe sur I : courbe sous ses cordes ; concave : courbe au-dessus.
- Pour f deux fois dérivable : convexe $\iff$ f' croissante $\iff$ $f'' \geq 0$.
- x^2 et exp sont convexes sur $\mathbb{R}$; $\sqrt{}$ est concave ; x^3 change de convexité en 0.

5 Tangentes et inégalités

- Convexe : courbe au-dessus de ses tangentes ; concave : au-dessous.
- Pour tout réel x : e^x $\geq$ x + 1 (tangente en 0).
- Pour tout x $\geq$ 0 : $\sqrt{x} \leq (x + 1)/2$ (tangente en 1).
- Sans convexité : étudier le signe de f(x) − (mx + p).

6 Point d'inflexion

- Point où la courbe traverse sa tangente : la convexité change.
- f'' s'annule en changeant de signe en a : point d'inflexion d'abscisse a.
- Exemple : $x^3 - 3x^2$, f''(x) = 6x − 6, point I(1 ; −2).

Pièges à éviter

- Oublier le facteur u' : (e^(x^2))' = 2x e^(x^2), pas e^(x^2).
- Confondre g(u(x)) et u(g(x)).
- Lire la convexité sur le signe de f' au lieu de f''.
- Conclure à une inflexion dès que f''(a) = 0 : x^4 en 0 est un contre-exemple.
- Dériver $\sqrt{u}$ sans vérifier que u > 0.