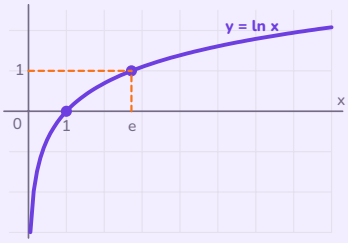
MATHÉMATIQUES · TERMINALE GÉNÉRALE

Fonction logarithme népérien

7 notions, l'essentiel à retenir et les pièges à éviter.



1 Rappels sur l'exponentielle

- exp' = exp, e^0 = 1, e^x > 0, exp strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- e^(a+b) = e^a × e^b ; e^(−a) = 1/e^a ; $(e^a)^n = e^{na}$.
- e^a = e^b $\iff$ a = b ; e^a < e^b $\iff$ a < b.

2 Définition de ln

e^x = a $\iff$ x = ln a (a > 0)

- Pour a > 0, ln a est l'unique solution de e^x = a.
- e^(ln a) = a pour a > 0 ; ln(e^x) = x pour tout réel x.
- ln 1 = 0 et ln e = 1 ; courbes de ln et exp symétriques par rapport à y = x.

3 Propriétés algébriques

ln(ab) = ln a + ln b (a > 0, b > 0)

- ln(1/a) = −ln a ; ln(a/b) = ln a − ln b.
- $\ln(a^n) = n \ln a$ (n entier relatif) ; $\ln(\sqrt{a}) = (1/2) \ln a$.
- ln(a + b) ne se simplifie pas.

4 Étude de ln

- ln'(x) = 1/x : ln est strictement croissante sur]0 ; +∞[.
- ln x < 0 sur]0 ; 1[et ln x > 0 sur]1 ; +∞[.
- Limites : −∞ en 0 (asymptote x = 0), +∞ en +∞.
- ln est concave : ln x $\leq$ x − 1 pour tout x > 0.

5 Croissances comparées

- En $+\infty$: $\ln(x)/x \to 0$ et $\ln(x)/x^n \to 0$.
- En 0 : $x \ln x \to 0$ et $x^n \ln x \to 0$.
- En 0 : $\ln(1 + x)/x \to 1$.
- Forme indéterminée : factoriser par le terme dominant.

6 La fonction ln(u)

$(\ln u)' = u'/u$

- Définie là où $u(x) > 0$.
- $\ln(u)$ a les mêmes variations que u.

7 Équations, inéquations, seuils

- Domaine d'abord, puis $\ln A = \ln B \iff A = B$, $\ln A = k \iff A = e^k$.
- $q^n < s \iff n \ln q < \ln s$; si $0 < q < 1$, diviser par $\ln q < 0$ renverse l'inégalité.
- Exemple : $0{,}9^n < 0{,}01$ dès $n = 44$.

Pièges à éviter

- Écrire $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$.
- Oublier le domaine : ln 0 et ln d'un négatif n'existent pas.
- Confondre $\ln(a)/\ln(b)$ et $\ln(a/b)$.
- Diviser par ln q négatif sans changer le sens de l'inégalité.
- Dériver $\ln(u)$ en $1/u$ au lieu de u'/u.