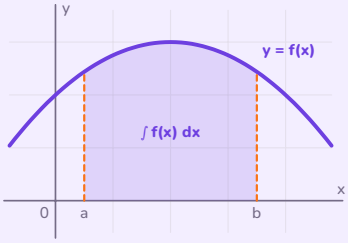
MATHÉMATIQUES · TERMINALE GÉNÉRALE

Calcul intégral

7 notions, l'essentiel à retenir et les pièges à éviter.



1 Intégrale et aire

- f continue et positive sur [a ; b] : l'intégrale de a à b est l'aire sous la courbe, entre x = a et x = b.
- Unité d'aire (u.a.) : aire du rectangle construit sur les unités des axes.
- Figure simple (rectangle, triangle, trapèze) : calcul géométrique.

2 Théorème fondamental et calcul

$\int$ de a à b de f(x) dx = [F(x)] de a à b = F(b) − F(a)

- F(x) = intégrale de a à x de f(t) dt est la primitive de f qui s'annule en a.
- Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- Pour f de signe quelconque, F(b) − F(a) définit l'intégrale.

3 Linéarité et Chasles

- Intégrale de f + g = somme des intégrales ; intégrale de kf = k fois l'intégrale.
- Chasles : de a à c = de a à b + de b à c.
- De a à a : 0. Échanger les bornes change le signe.

4 Signe et comparaison (a $\leq$ b)

- f $\leq$ 0 : l'intégrale est l'opposé de l'aire ; f de signe variable : aire algébrique.
- f $\geq$ 0 sur [a ; b] : intégrale $\geq$ 0.
- f $\leq$ g sur [a ; b] : intégrale de f $\leq$ intégrale de g (encadrements).

5 Aire entre deux courbes

Aire (f $\geq$ g sur [a ; b]) = $\int$ de a à b de (f(x) − g(x)) dx

- Chercher les intersections, puis la position relative des courbes.
- Si les courbes se croisent, découper l'intervalle (Chasles).

6 Valeur moyenne

$$\mu = (1/(b - a)) \times \int \text{de } a \text{ à } b \text{ de } f(x)\,dx$$

- Hauteur du rectangle de base [a ; b] qui a la même aire que le domaine.
- Comprise entre le minimum et le maximum de f sur [a ; b].

7 Intégration par parties

$$\int uv' = [uv] - \int u'v$$

- u : le facteur qui se simplifie en dérivant (polynôme, ln x) ; v' : celui qu'on sait primitiver.
- Exemples : intégrale de x e^x sur [0 ; 1] = 1 ; de ln x sur [1 ; e] = 1.

Pièges à éviter

- Écrire F(a) − F(b) au lieu de F(b) − F(a).
- Prendre une intégrale négative pour une aire : découper là où f change de signe.
- Oublier e^0 = 1 ou ln 1 = 0 à la borne du bas.
- Diviser par b au lieu de b − a pour la valeur moyenne.
- Se tromper de signe sur v en intégrant par parties (v' = e^(−x) donne v = −e^(−x)).