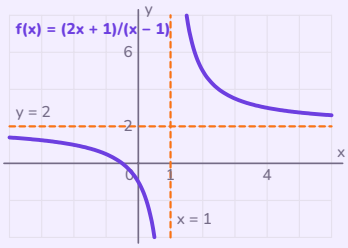
MATHÉMATIQUES · TERMINALE GÉNÉRALE

Limites de fonctions

7 notions, l'essentiel à retenir et les pièges à éviter.



1 Limites en l'infini

$e^x \to +\infty$ en $+\infty$ et $e^x \to 0$ en $-\infty$

- Limite finie ℓ en $\pm\infty$: la droite $y = \ell$ est asymptote horizontale.
- x, x^3 : $+\infty$ en $+\infty$, $-\infty$ en $-\infty$; x^2, x^4 : $+\infty$ des deux côtés ; $\sqrt{x}$: $+\infty$ en $+\infty$.
- $1/x$ et $1/x^2$ tendent vers 0 en $\pm\infty$.

2 Limites en un réel

- Limite infinie en a (à gauche ou à droite) : la droite x = a est asymptote verticale.
- Réel non nul divisé par une quantité qui tend vers 0 : limite infinie.
- Le signe se lit dans un tableau de signes du dénominateur.

3 Opérations et composée

- Somme, produit, quotient : on combine les limites, avec la règle des signes.
- Composée : si $u(x) \to b$ et $g(X) \to c$ quand $X \to b$, alors $g(u(x)) \to c$.
- Exemple : e^(−x²) → 0 en $+\infty$ car $-x^2 \to -\infty$.

4 Formes indéterminées

F.I. : $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞, $0/0$

- Transformer l'écriture : factoriser, simplifier, développer.
- En $\pm\infty$, un polynôme a la limite de son terme de plus haut degré.
- En $\pm\infty$, un quotient de polynômes a la limite du quotient des termes de plus haut degré.

5 Comparaison et encadrement

- $f \geq g$ et $g \to +\infty$: $f \to +\infty$. $f \leq h$ et $h \to -\infty$: $f \to -\infty$.
- Gendarmes : $g \leq f \leq h$ avec g et h de même limite ℓ, alors $f \to \ell$.
- Encadrer cos x et sin x entre −1 et 1.

6 Croissances comparées

$e^x/x^n \to +\infty$ et $x^n e^{(-x)} \to 0$ en $+\infty$; $x^n e^x \to 0$ en $-\infty$

- En $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de x.
- Face à une F.I. avec e^x et x^n : factoriser par e^x.

Pièges à éviter

- Prendre une forme indéterminée pour une absence de limite.
- Utiliser le raccourci du terme de plus haut degré en un réel a.
- Oublier d'étudier le signe du dénominateur à gauche et à droite de a.
- Confondre asymptote horizontale $y = \ell$ et asymptote verticale $x = a$.
- Écrire « $\ell/0$ » sans conclure : c'est $\pm\infty$ dès que $\ell \neq 0$.