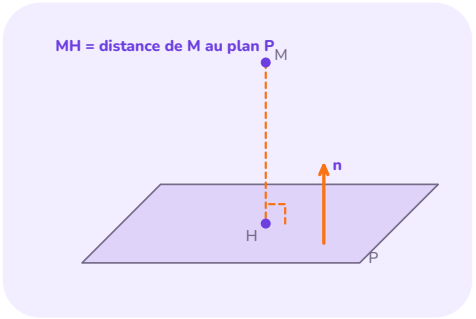
MATHÉMATIQUES · TERMINALE GÉNÉRALE

Orthogonalité et distances dans l'espace

7 notions, l'essentiel à retenir et les pièges à éviter.



1 Produit scalaire dans l'espace

$$u \cdot v = xx' + yy' + zz'$$

- Deux vecteurs sont toujours dans un même plan : les définitions de Première s'appliquent.
- En repère orthonormé : norme $\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$, longueur AB par les coordonnées de AB.

2 Orthogonalité

- u et v orthogonaux si et seulement si $u \cdot v = 0$.
- Droites orthogonales : directions orthogonales, pas forcément sécantes.
- Droite orthogonale à un plan : orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

3 Vecteur normal

- n normal à P : n non nul, orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P.
- Plan passant par A de vecteur normal n : ensemble des M tels que $AM \cdot n = 0$.

4 Équation cartésienne d'un plan

$$ax + by + cz + d = 0$$

- n(a ; b ; c) normal : ax + by + cz + d = 0, d trouvé avec un point du plan.
- Plan (ABC) : chercher n avec $n \cdot AB = 0$ et $n \cdot AC = 0$, en fixant une coordonnée.

5 Positions relatives

- d orthogonale à P : u colinéaire à n. d parallèle à P : $u \cdot n = 0$.
- Plans parallèles : n et n' colinéaires. Plans perpendiculaires : $n \cdot n' = 0$.
- Intersection de d et P : remplacer x, y, z en fonction de t dans l'équation de P.

6 Projeté orthogonal et distances

$$MN^2 = MH^2 + HN^2 \geq MH^2$$

- Sur un plan : H est l'intersection de P et de la droite passant par M dirigée par n.
- Sur une droite d dirigée par u : $H \in d$ et $MH \cdot u = 0$.
- La distance de M au plan ou à la droite vaut MH, la plus courte distance.

Pièges à éviter

- Appliquer xx' + yy' + zz' dans un repère qui n'est pas orthonormé.
- Confondre droites orthogonales et perpendiculaires : dans l'espace, elles peuvent ne pas se couper.
- Conclure qu'un vecteur est normal avec un seul produit scalaire nul.
- Inclure la constante d dans le vecteur normal de ax + by + cz + d = 0.
- S'arrêter à la valeur de t sans calculer les coordonnées du point.