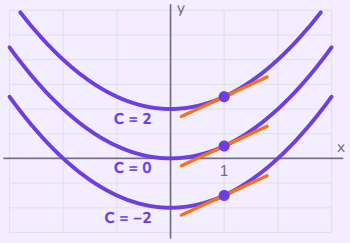
MATHÉMATIQUES · TERMINALE GÉNÉRALE

Primitives et équations différentielles

7 notions, l'essentiel à retenir et les pièges à éviter.



1 Équation différentielle et primitive

F primitive de f sur I : F'(x) = f(x) pour tout x de I

- Une équation différentielle a pour inconnue une fonction y ; la résoudre, c'est trouver toutes ses solutions sur un intervalle.
- Vérifier une solution : calculer sa dérivée, remplacer, comparer les deux membres.
- F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et F' = f : F est solution de y' = f.

2 Toutes les primitives

Primitives de f : x ↦ F(x) + C, C réel

- Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
- Une condition F(x0) = y0 fixe la constante : une seule primitive la vérifie.

3 Primitives usuelles

- k → kx ; x^n → x^(n+1)/(n + 1), n entier différent de −1.
- 1/x → ln x et 1/√x → 2√x, sur]0 ; +∞[.
- e^x → e^x ; cos x → sin x ; sin x → −cos x.
- Linéarité : une primitive de af + bg est aF + bG.

4 Formes composées

- u'e^u → e^u ; e^(ax + b) → (1/a)e^(ax + b).
- u'u^n → u^(n+1)/(n + 1), n ≠ −1 (u non nulle si n < 0).
- u'/u → ln(u) si u > 0 ; u'/√u → 2√u si u > 0.
- Faire apparaître u' en ajustant un facteur constant.

5 Équation y' = ay

$$y' = ay \Leftrightarrow y(x) = Ce^{ax}$$

- Solutions sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto Ce^{ax}$, C réel.
- Une condition $y(x_0) = y_0$ donne une unique solution.

6 Équations y' = ay + b et y' = ay + f

$$y' = ay + b \Leftrightarrow y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

- $a \neq 0$: solution constante $k = -b/a$, puis $y(x) = Ce^{ax} + k$.
- Si $a < 0$, toutes les solutions tendent vers $-b/a$ en $+\infty$.
- $y' = ay + f$ avec une solution particulière p : $y(x) = Ce^{ax} + p(x)$.
- Méthode : solution constante ou particulière, forme générale, condition initiale, vérification.

Pièges à éviter

- Dériver au lieu de primitiver (x^3 n'a pas pour primitive $3x^2$).
- Écrire $e^{ax} + C$ au lieu de Ce^{ax} pour les solutions de $y' = ay$.
- Oublier le signe dans $k = -b/a$.
- Garder le facteur 2 devant ln dans la primitive de $2x/(x^2 + 3)$.
- Appliquer $u'/u \to \ln(u)$ sans vérifier que $u > 0$.