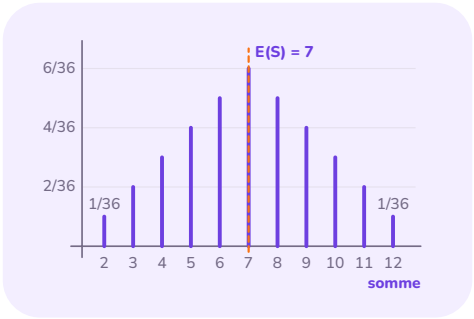
MATHÉMATIQUES · TERMINALE GÉNÉRALE

Sommes de variables aléatoires et loi des grands nombres



7 notions, l'essentiel à retenir et les pièges à éviter.

1 Linéarité de l'espérance

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

- Toujours vraie, sans hypothèse d'indépendance.
- $E(aX + b) = aE(X) + b$; $E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$.

2 Variance d'une somme

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) \text{ si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes}$$

- X et Y indépendantes : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, et $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$.
- $V(aX + b) = a^2\, V(X)$; les écarts types ne s'additionnent pas.
- Sans indépendance, pas de formule : $V(X + X) = 4V(X)$.

3 Somme de variables de Bernoulli

- Le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli est $X = X_1 + \ldots + X_n$, chaque terme suivant une loi de Bernoulli.
- Linéarité : $E(X) = np$; indépendance : $V(X) = np(1 - p)$.

4 Échantillon et moyenne empirique

$$V(M_n) = V(X) / n$$

- Échantillon de taille n : variables $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes, de même loi que X.
- $S_n = X_1 + \ldots + X_n$: $E(S_n) = nE(X)$, $V(S_n) = nV(X)$.
- $M_n = S_n / n$: $E(M_n) = E(X)$, $V(M_n) = V(X) / n$, $\sigma(M_n) = \sigma(X) / \sqrt{n}$.

5 Inégalités

$$\mathbf{P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V(X) / \delta^2}$$

- Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\delta > 0$: $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V(X) / \delta^2$.
- En écarts types : $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$.
- Concentration : $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq V(X) / (n\delta^2)$; on en tire une taille n suffisante.

6 Loi faible des grands nombres

- Pour tout $\delta > 0$, $P(|M_n - \mu| \geq \delta)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- Elle justifie l'estimation d'une espérance ou d'une probabilité par simulation.
- Elle n'implique aucune compensation : les épreuves restent indépendantes.

Pièges à éviter

- Additionner des variances sans vérifier l'indépendance.
- Additionner des écarts types au lieu des variances.
- Confondre $V(X_1 + X_2) = 2V(X)$ et $V(2X) = 4V(X)$.
- Diviser par δ au lieu de δ^2 dans Bienaymé-Tchebychev.
- Croire que la loi des grands nombres fait « compenser » les résultats passés.