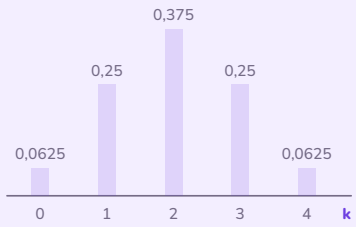
MATHÉMATIQUES · TERMINALE STMG

Variables aléatoires et loi binomiale

7 notions, l'essentiel à retenir et les pièges à éviter.



1 Variable aléatoire et loi

- Une variable aléatoire X associe un nombre à chaque issue.
- Sa loi : tableau des valeurs xi et des probabilités pi = P(X = xi).
- La somme des pi vaut 1.

2 Espérance

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$$

- E(X) est la moyenne à long terme des valeurs de X.
- Gain net G = gain − mise. Jeu équitable si E(G) = 0, défavorable au joueur si E(G) < 0.

3 Schéma de Bernoulli

- Épreuve de Bernoulli : succès S (probabilité p) ou échec (probabilité 1 − p).
- Schéma : n épreuves identiques et indépendantes, représentées par un arbre.
- Probabilité d'un chemin : produit des probabilités de ses branches.

4 Coefficients binomiaux

$$C(n\,;k) + C(n\,;k+1) = C(n+1\,;k+1)$$

- C(n ; k), lu « k parmi n » : nombre de chemins à k succès sur n épreuves.
- C(n ; 0) = C(n ; n) = 1 ; C(n ; 1) = C(n ; n − 1) = n ; C(n ; k) = C(n ; n − k).
- Triangle de Pascal : chaque nombre est la somme des deux nombres au-dessus. Ligne 6 : 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

5 Loi binomiale B(n ; p)

$$P(X = k) = C(n ; k) \times p^k \times (1 - p)^{n - k}$$

- X compte les succès d'un schéma de Bernoulli de n épreuves.
- $P(X = 0) = (1 - p)^n$; $P(X = n) = p^n$.
- $P(X = 1) = n\,p\,(1 - p)^{n - 1}$; $P(X = n - 1) = n\,p^{n - 1}\,(1 - p)$.

6 Réunions et espérance

$$E(X) = np$$

- $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$.
- $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$.
- B(10 ; 0,05) : $P(X = 0) \approx 0{,}599$, $P(X \geq 1) \approx 0{,}401$, $E(X) = 0{,}5$.

Pièges à éviter

- Oublier le coefficient C(n ; k) : $p^k\,(1 - p)^{n - k}$ est la probabilité d'un seul chemin.
- Additionner de nombreux termes pour $P(X \geq 1)$ au lieu de calculer $1 - P(X = 0)$.
- Appliquer la loi binomiale sans vérifier deux issues et des épreuves identiques et indépendantes.
- Juger un jeu sans retirer la mise du gain.
- Lire E(X) comme une valeur forcément prise par X : c'est une moyenne à long terme.